

La terza legge 15. Maji anni MDCXVIII

"Proportio quae est inter binorum quorumcunque Planetarum tempora periodica, sit praecise sesquialtera proportionibus mediarum distantiarum, id est Orbium ipsorum"

La terza legge di Keplero, scoperta il 15 maggio 1618, fu pubblicata per la prima volta nel 1619 nell'opera *Harmonices Mundi*:

Il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta intorno al Sole è proporzionale al cubo della sua distanza media dal Sole:

$$T^2 = K r^3$$

dove:

$$K = \frac{4\pi^2 a^3}{G M} = 2,96 \times 10^{-19} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^3}$$

(UA = unità astronomica = distanza media della Terra dal Sole)

Se si fanno i calcoli con i vari pianeti del nostro sistema solare, si ottiene infatti la tabella a destra.

	Periodo di rivoluzione T in anni	Distanza dal sole r in UA	T ²	r ³	K (Anni ² /UA ³)
Mercurio	0,2410	0,387	0,05808	0,05796	≈ 1
Venere	0,616	0,723	0,37964	0,37793	
Terra	1	1	1	1	
Marte	1,88	1,524	3,5344	3,5396	
Giove	11,9	5,203	141,61	140,85	
Saturno	29,5	9,539	870,25	867,98	
Urano	84	19,191	7056	7068	
Nettuno	165	30,071	27225	27192	
Plutone	248	39,457	61504	61429	

COME ARRIVA KEPLERO ALLA SCOPERTA?

Inanzitutto aveva a disposizione **dati osservativi molto accurati**: poi, nutrito da un presupposto fondamentale per fare lo scienziato: **credeva che i fenomeni naturali seguissero uno schema ben preciso** che l'ingegno umano avrebbe potuto svelare. Infine, era convinto che tali schemi fossero esprimibili in termini di **relazioni tra i numeri**.

Con un semplice esempio possiamo farci un'idea del metodo utilizzato da Keplero.

Supponiamo di avere i seguenti dati per due pianeti:

il pianeta A ha **semiasse a = 1 e periodo T = 3**;

il pianeta B ha **semiasse a = 2 e periodo T = 6**.

Si potrebbe quindi dedurre che la regola sia: **T = 3a**

Come abbiamo fatto? Abbiamo **formulato un'ipotesi** - il periodo è il triplo del semiasse -, l'abbiamo **messa alla prova** e abbiamo visto che **funziona**.

Se scopriamo però un terzo **pianeta, C**, con **semiasse a = 4 e periodo T = 18**, questa congettura viene falsificata.

Allora il nostro obiettivo è di proporre una **nuova regola** che valga per tutti e tre i pianeti. Dopo qualche tentativo ci accorgiamo che una nuova regola, **T = a² + 2**, funziona!

Ovviamente la **validità della congettura rimane a rischio**: dobbiamo cercare qualche altro pianeta e metterla alla prova, e se dovesse venire smentita dai fatti, modificarla opportunamente.

Questo, molto schematicamente, è il tipo di lavoro effettuato da Keplero. Tuttavia, spesso in fisica non ci si accontenta di trovare una **descrizione algebrica** dei fenomeni, ma si persegue una **descrizione dinamica**, cioè che ci metta in grado di capire quali siano le cause di un evento e come esse ne determinino lo sviluppo. A ciò si arriverà poi con Newton.

LA MATERIA OSCURA

Una conseguenza della terza legge di Keplero è che la velocità di un corpo orbitante è inversamente proporzionale alla radice quadrata del raggio dell'orbita.

Si osserva infatti che le velocità dei pianeti del sistema solare obbediscono a questa legge.

Tuttavia, nel misurare con grande accuratezza la **velocità delle stelle** che orbitano intorno all'ammasso centrale di galassie a spirale, gli astronomi (Vera Rubin e collaboratori) hanno scoperto che non dipendono dal raggio dell'orbita e rimangono costanti, cioè **v = costante**.

Poiché la terza legge di Keplero è una conseguenza della gravità, la maggior parte degli astronomi crede che l'unico modo di spiegare quest'apparente deviazione, sia quello di supporre l'esistenza di un alone di materia invisibile che esercita una **forza gravitazionale** aggiuntiva. Un alone di **materia oscura** ("dark matter"): un ipotetico tipo di materia, diverso dalla materia ordinaria.

Dunque, quattrocento anni dopo la sua formulazione, la terza legge di Keplero è ancora una sorgente preziosa di domande fondamentali sul cosmo!

Nel 1687 Isaac Newton dimostrerà che **la terza legge di Keplero è una conseguenza particolare delle leggi della dinamica e della teoria della gravitazione universale**.

Vediamo la dimostrazione di ciò nel caso semplice di un pianeta di massa **m** che si muove lungo un'orbita circolare.

Partiamo dal **II principio della dinamica**, **F = ma** dove **F** è la forza attrattiva applicata dal Sole di massa **M**

al pianeta, cioè **F = G $\frac{Mm}{r^2}$** , allora **G $\frac{Mm}{r^2} = ma$**

da cui si ricava che l'accelerazione del pianeta è **a = G $\frac{M}{r^2}$**

Ora, considerando che nel moto circolare l'accelerazione è centripeta e vale **a = $\frac{v^2}{r}$** , si ha che

$$v^2 = G \frac{M}{r}$$

Poiché **v** è la velocità con cui viene percorsa l'orbita di raggio **r** nel periodo di rivoluzione **T**, cioè **v = $\frac{2\pi r}{T}$**

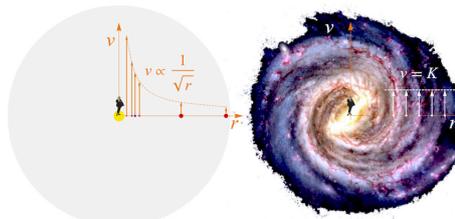
sostituendo nella precedente si ottiene che:

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G \frac{M}{r}$$

da cui, con un semplice passaggio algebrico, concludiamo che:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

ovvero proprio la terza legge di Keplero!



La prima legge

"Orbita planetarum non est circulus. Ergo ellipsis est planetarum iter"

La prima legge venne enunciata nell'*Astronomia Nova* nel 1609, lo stesso anno in cui Galileo costruì e utilizzò il suo primo telescopio. Essa stabilisce che **l'orbita descritta da ogni pianeta nel suo moto di rivoluzione è un'ellisse di cui il Sole occupa uno dei due fuochi**.

La distanza di un pianeta dal Sole non è quindi sempre la stessa; il punto in cui il pianeta è più vicino al Sole si chiama **perielio** (dal greco *peri* = accanto), il punto in cui è più distante **afelio** (dal greco *apo* = lontano).

La **TRADIZIONE PLATONICA DEL CERCHIO E LA CONGETTURA RIVOLUZIONARIA DELL'ELLISSE** Secondo Simplicio (fl. 530 d.C.) si deve a **Platone** l'idea che il **cerchio** - che non ha né inizio né fine, che è sprovvisto di angoli e spigoli e che, quindi, rappresenta la perfezione, la completezza e l'unione - sia la figura geometrica ideale per descrivere i moti celesti.

Nacque così la sfida - che si protrasse nel corso dei secoli e divenne una vera e propria tradizione di ricerca - di formulare una descrizione esatta dei moti celesti ricorrendo solo a **moti circolari uniformi** o a loro **combinazioni**.

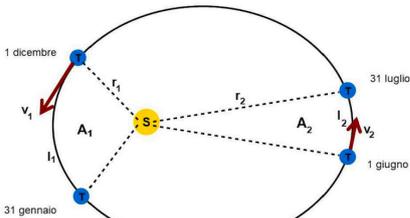
Il **modello geocentrico** giunse a perfezionamento con **Tolomeo** (fl. II sec. d.C.), autore dell'*Almagesto*, e andò a costituire la dottrina astronomiche per oltre un millennio. Quando grandi menti rivoluzionarie come **Copernico** (1473-1543) e **Galileo** (1564-1642), stravolsero questo modello sostituendo la Terra al Sole, continuarono anch'essi a considerare circolari le orbite dei pianeti.

Solo nel **1609**, Keplero osò teorizzare che i pianeti si muovessero su **orbite ellittiche**, basandosi sulle precise osservazioni accumulate da **Tycho Brahe** che non potevano proprio venire ignorate: il matematico tedesco era solito affermare infatti che "se Dio ci ha dato la precisione di Brahe, noi dobbiamo rispettarla".

Keplero seguì un processo per **approssimazioni successive**: eseguì circa 70 iterazioni, variando i parametri per Marte, e impiegando sei anni di lavoro (1600-1606) e 900 pagine di calcoli, per interpolare i dati con combinazioni di moti circolari, e scoprendo infine che questi si rivelavano sempre inadeguati. Ma una volta formulata l'ipotesi dell'**ellisse**, tutti i conti tornarono a meraviglia!

La seconda legge

"divisa orbita in particulas minutissimas aequales: accrescete iis moras planetarum per eas, in proportione intervallorum inter eas & Solem."



La seconda legge - conosciuta anche come "**legge delle aree**" e contenuta nell'*Astronomia Nova* - è una legge relativa al moto dei pianeti intorno al Sole e stabilisce che **il raggio vettore che congiunge il Sole a un pianeta qualsiasi del sistema solare copre spazi uguali in tempi uguali**.

Come conseguenza, la velocità del pianeta varia.

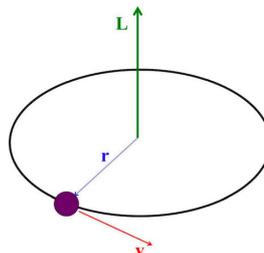
Infatti se le due aree **A₁** e **A₂** sono uguali, allora essendo **v₂ > v₁**, si ha anche che **l₁ > l₂**,

cioè nello stesso tempo **t** il pianeta avrà percorso due porzioni di traiettoria di diversa lunghezza, e quindi

$$l_1 = v_1 t > l_2 = v_2 t \quad \text{cioè} \quad v_1 > v_2$$

Curiosità: per la Terra **v₁** vale circa 109000 km/h, mentre **v₂** circa 105000 km/h.

N.B.: nel disegno abbiamo enfatizzato l'eccentricità dell'orbita, in particolare se consideriamo l'orbita terrestre, che è in effetti praticamente un cerchio.



Il **momento angolare** per un corpo puntiforme **P** di massa **m** che si muove di moto circolare uniforme con velocità **v** secondo una circonferenza di raggio **r** è un **vettore** la cui intensità è definita come

$$L = mvr$$

Più in generale, ogni corpo che ruota possiede un certo momento angolare.

In assenza di attriti, tale momento tende a conservarsi (in direzione e intensità).

Allora, **v** e **r** possono variare secondo una relazione di **proporzionalità inversa**.



Ad esempio, per una pattinatrice che esegue una rotazione sul proprio asse: allargando le braccia (quindi ampliando il vettore **r**) la velocità di rotazione diminuisce, mentre riportando le braccia al petto (e quindi diminuendo il vettore **r**) la velocità aumenta.

Lo stesso avviene per un pianeta in rivoluzione attorno al Sole. La seconda legge di Keplero rappresenta dunque anche un caso particolare di un principio più generale della meccanica.

In alto a destra: Anonimo, Ritratto di Keplero, 1610.
In basso a destra: Lucio Saffaro, Ritratto di Keplero, (opus CVIII), 1967, olio su tela, 90 x 75 cm, Coll. privata, Bologna, in Giovanni Maria Accame (a cura), Saffaro. Le forme del pensiero, Edizioni Aspias, Bologna 2004, p. 65, tav. 11.



JOHANNES KEPLER